تمرين: أثبت أن

$$x\cdot y + x\cdot z = (x\wedge y\wedge z')\vee(x\wedge y'\wedge z)$$

$$h_1 = x\cdot y + x\cdot z = x(y+z) = x\wedge((y\wedge z')\vee(y'\wedge z))$$

$$= (x\wedge(y\wedge z'))\vee(x\wedge(y'\wedge z))$$
$$= (x\wedge y\wedge z')\vee(x\wedge y'\wedge z)$$

تمرين: f تابع تقابلي

$$f: M \longrightarrow N$$

f ايزومورفيزم شبكي عاكس للترتيب $\Leftrightarrow$ f ايزومورفيزم عاكس للترتيب.

الحل:

لنفرض (شبكي) لنثبت أن f ايزومورفيزم عاكس للترتيب وهو مورفيزم عاكس للترتيب لأن:

- $\forall x, y \in M \;;\; x \leq y \Rightarrow$

$$x \leq y \overset{?}{\Rightarrow} f(y) \leq f(x)$$
$$x = x\wedge y \Rightarrow f(x) = f(x\wedge y)$$
$$f(x) = f(x)\vee f(y)$$
$$\Rightarrow f(y) \leq f(x)$$

أو $\forall x, y \in M \;;\; x \leq y \Rightarrow y = x\vee y$

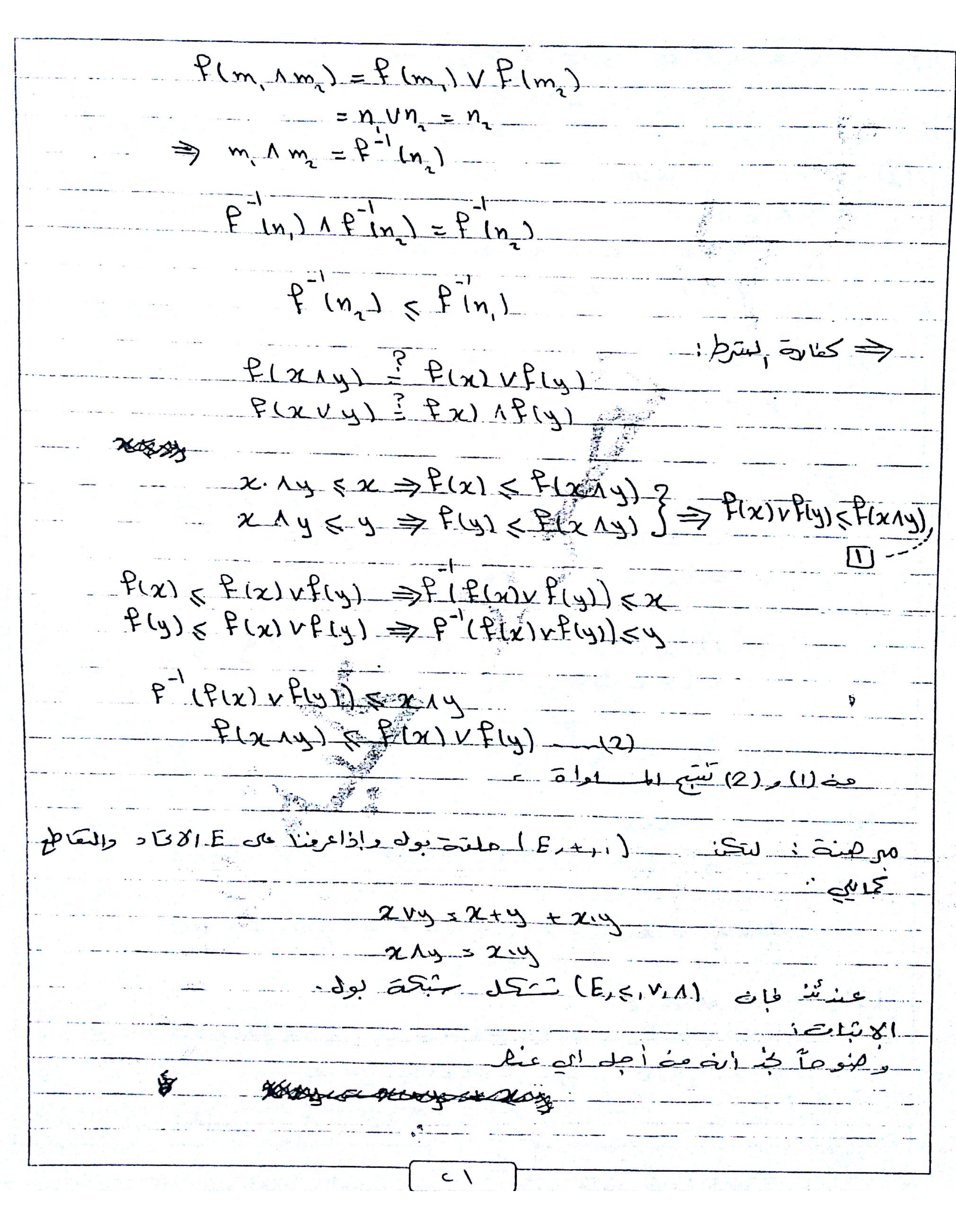
$$\Rightarrow f(y) = f(x\vee y) = f(x)\wedge f(y)$$
$$\Rightarrow f(y) \leq f(x)$$

- وهو متباين
- هل f^{-1} هو مورفيزم عاكس للترتيب؟

$$\forall n_1, n_2 \in N \;;\; n_1 \leq n_2 \Rightarrow f^{-1}(n_2) \leq f^{-1}(n_1)$$

$$\Rightarrow \exists m_1, m_2 \in M \;;\; f(m_1) = n_1 \;,\; f(m_2) = n_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_1 = f^{-1}(n_1) \\ m_2 = f^{-1}(n_2) \end{cases}$$



$$f(m_1 \wedge m_2) = f(m_1) \vee f(m_2)$$
$$= n_1 \vee n_2 = n_2$$
$$\Rightarrow \quad m_1 \wedge m_2 = f^{-1}(n_2)$$

$$f^{-1}(n_1) \wedge f^{-1}(n_2) = f^{-1}(n_2)$$

$$f^{-1}(n_2) \leq f^{-1}(n_1)$$

كفاية الشرط: ⇐

$$f(x \wedge y) \stackrel{?}{=} f(x) \vee f(y)$$
$$f(x \vee y) \stackrel{?}{=} f(x) \wedge f(y)$$

$$\left.\begin{array}{l} x \wedge y \leq x \Rightarrow f(x) \leq f(x \wedge y) \\ x \wedge y \leq y \Rightarrow f(y) \leq f(x \wedge y) \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \vee f(y) \leq f(x \wedge y) \quad (1)$$

$$f(x) \leq f(x) \vee f(y) \Rightarrow f^{-1}(f(x) \vee f(y)) \leq x$$
$$f(y) \leq f(x) \vee f(y) \Rightarrow f^{-1}(f(x) \vee f(y)) \leq y$$

$$f^{-1}(f(x) \vee f(y)) \leq x \wedge y$$
$$f(x \wedge y) \geq f(x) \vee f(y) \quad (2)$$

من (1) و(2) تنتج المساواة.

مبرهنة: لتكن $(E, +, \cdot)$ حلقة بول وإذا عرفنا على E الاتحاد والتقاطع كما يلي:

$$x \vee y = x + y + x \cdot y$$
$$x \wedge y = x \cdot y$$

عندئذ فإن $(E, \leq, \vee, \wedge)$ تشكل شبكة بول.

الإثبات:

وواضحاً أنه من أجل أي عنصر

(1)- $\forall\, x, y \in E \;;\; x \vee y \in E$

$x \wedge y \in E$

(2)- اللانمو.

$\forall\, x \in E$

$x \vee x = x + x + x \cdot x = 0 + x = x$

$x \wedge x = x \cdot x = x$

(3)- تجميعية.

$\forall\, x, y, z \in E$

$x \vee (y \vee z) \overset{?}{=} (x \vee y) \vee z$

$\ell_1 = x \vee (y \vee z) = x + (y + z + y \cdot z) + x\,(y + z + y \cdot z)$

$= x + y + z + y \cdot z + xy + xz + xyz$

$= (x + y + xy) + z + \underline{yz + xz + xyz}$

$= (x + y + xy) + z + (y + x + xy) \cdot z$

$= (x \vee y) \vee z = \ell_2$

$(x \wedge y) \wedge z = (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) = x \wedge (y \wedge z)$

(4)- تبديلية.

$x \cdot y = y \cdot x \Rightarrow x \wedge y = y \wedge x \quad ; \forall\, x, y \in E$

$x \vee y = x + y + x \cdot y = y + x + y \cdot x = y \vee x$

(5)- الامتصاص

$\forall\, x, y \in E \Rightarrow x \wedge (x \vee y) = x$

$x \vee (x \wedge y) = x$

$$x \vee (x \wedge y) = x + (x \cdot y) + x \cdot (x \cdot y)$$
$$= x + \underbrace{xy + xy}_{=0}$$
$$= x + 0 = x$$

$$x \wedge (x \vee y) = x \cdot (x + y + x \cdot y)$$
$$= x + \underbrace{xy + xy}_{=0}$$
$$= x + 0 = x$$

[6] - العنصر الأكبر والعنصر الأصغر.

$$\forall x \in E \; ; \; x \cdot 0 = 0 \Rightarrow x \wedge 0 = 0$$
$$\Rightarrow 0 \leq x$$

إذا العنصر (0) هو العنصر الأصغر.

$$x \cdot 1 = x \Rightarrow x \wedge 1 = x$$
$$\Rightarrow x \leq 1$$

العنصر (1) هو العنصر الأكبر.

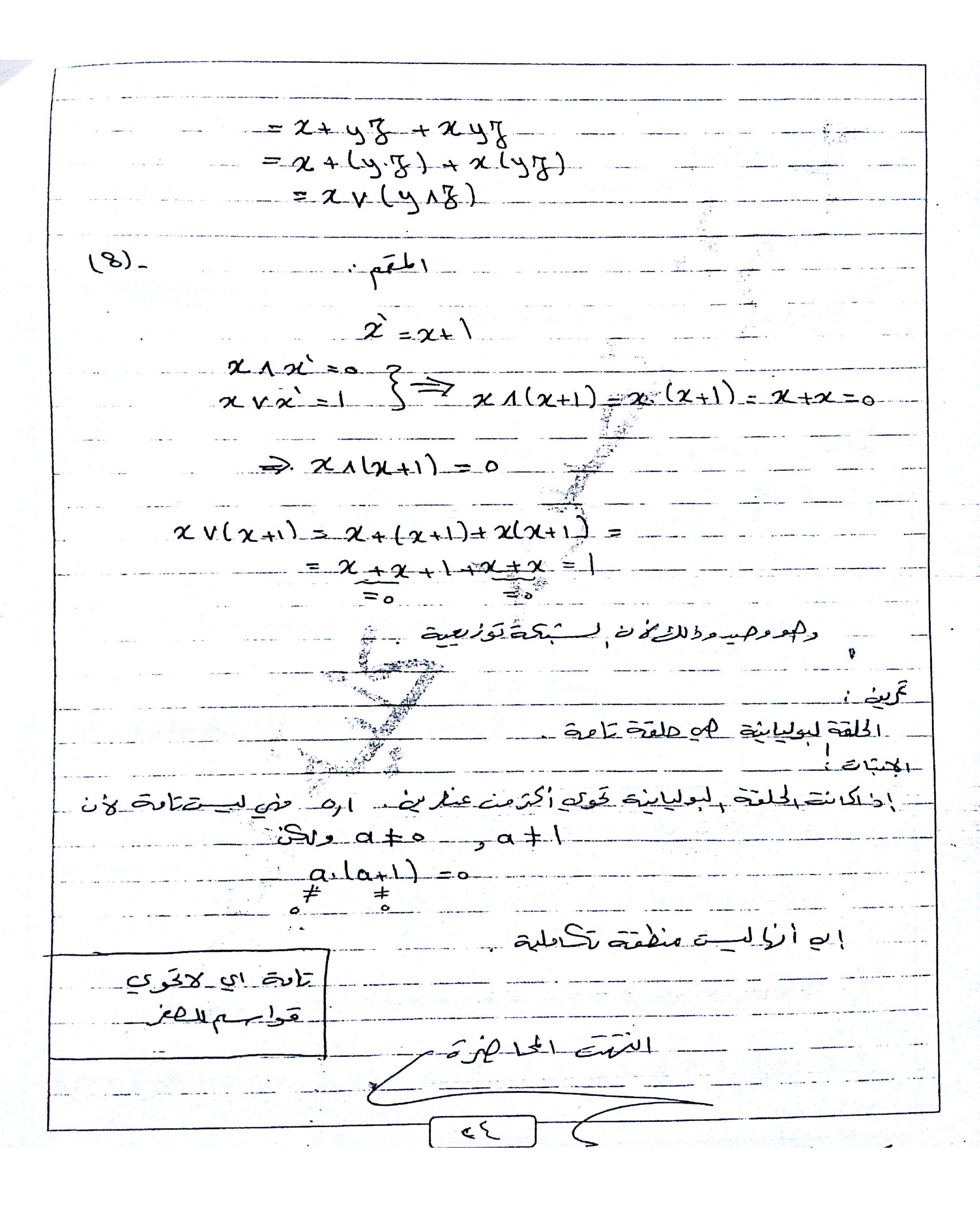
(7) - توزيعية.

$$x \vee (y \wedge z) \overset{?}{=} (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

$$f_1 = x \vee (y \wedge z) = x + (y \cdot z) + x \cdot (y \cdot z)$$
$$= x + y \cdot z + xyz$$

$$f_2 = (x \vee y) \wedge (x \vee z) = (x + y + x \cdot y) \cdot (x + z + xz)$$

$$= x + \underbrace{xz + xz}_{=0} + \underbrace{xy + yz + xyz + xy}_{=0} + \underbrace{xyz + xyz}_{=0}$$



$= x + yz + xyz$

$= x + (y \cdot z) + x(yz)$

$= x \vee (y \wedge z)$

(8)- المتمم :

$x' = x + 1$

$\left.\begin{array}{l} x \wedge x' = 0 \\ x \vee x' = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow x \wedge (x+1) = x \cdot (x+1) = x + x = 0$

$\Rightarrow x \wedge (x+1) = 0$

$x \vee (x+1) = x + (x+1) + x(x+1) =$

$= \underbrace{x + x}_{=0} + 1 + \underbrace{x + x}_{=0} = 1$

وهو وحيد لأن الشبكة توزيعية .

تمرين :

الحلقة البوليانية هي حلقة تامة .

الجواب :

إذا كانت الحلقة البوليانية تحوي أكثر من عنصرين 0,1 فهي ليست تامة لأن

$a \neq 0 \ , \ a \neq 1$ ولكن

$\underset{\neq 0}{a} \cdot \underset{\neq 0}{(a+1)} = 0$

إي أنها ليست منطقة تكاملية .

تامة اي لاتحوي قواسم للصفر

انتهت المحاضرة